

УДК 519.21

## БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

*В.Т. Дубровин*

### Аннотация

Пусть  $W$  – невырожденная целочисленная матрица такая, что  $|\det W| > 1$ ,  $f$  – заданная на единичном гиперкубе в  $R^d$  вещественнозначная периодическая по каждому аргументу липшиц-непрерывная функция. Для последовательности  $(f(tW^n))$  доказана центральная предельная теорема с большими отклонениями с промежутком действия  $[1; o(n^{1/8}/\ln n)]$ .

**Ключевые слова:** предельная теорема, эндоморфизмы, большие отклонения.

---

В работе [1] исследована скорость сходимости в центральной предельной теореме для преобразования  $Tt = \{tW\}$ , где  $t \in \Omega_d$ ,  $\Omega_d$  –  $d$ -мерный тор,  $W$  – невырожденная целочисленная матрица,  $\{\cdot\}$  – обозначение дробной доли. Целью настоящей работы является доказательство предельной теоремы с большими отклонениями для преобразование  $T$ , то есть исследование поведения функции распределения

$$F_n(x) = \text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) < x \right\}$$

в случае, когда  $x$  растет вместе с  $n$ . Здесь  $\text{mes} \{\cdot\}$  – мера Лебега, определенная на гиперкубе  $\overline{\Omega}_d = \{t = (t_1, \dots, t_d) : 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, d\}$ ;  $f(t)$  – вещественнозначная периодическая по каждому  $t_1, \dots, t_d$  функция, заданная на  $\overline{\Omega}_d$ ;

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\overline{\Omega}_d} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) \right)^2 dt.$$

Ранее в работе [2] был получен результат аналогичного характера. В предположении существования предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_n(x) = \sigma^2 > 0$$

и справедливости условий:

1) существует такая постоянная  $A > 0$ , что

$$|f(t) - f(t')| \leq A \|t - t'\|, \quad t, t' \in \overline{\Omega}_d, \|t\| = \left( \sum_{i=1}^d t_i^2 \right)^{1/2};$$

2) матрица  $W$  такова, что

$$\sup_{\|t\|<1} \|t W^{-1}\| < 1, \quad |\det W| > 1;$$

3)  $f$  интегрируема по Лебегу на  $\overline{\Omega}_d$  и  $\int_{\overline{\Omega}_d} f(t) dt = 0$ .

Равномерно относительно  $x$ ,  $0 \leq x \leq O\left(\frac{n^{1/10}}{w(n) \ln^2 n}\right)$ , имеют место соотношения для больших уклонений

$$1 - F_n(x) = (1 - \Phi(x)) \left(1 + O\left(\frac{(x+1) \ln^2 n}{n^{1/10}}\right)\right),$$

$$F_n(-x) = \Phi(-x) \left(1 + O\left(\frac{(x+1) \ln^2 n}{n^{1/10}}\right)\right),$$

где функция  $w$  такова, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} w(n) = \infty$ ,  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2) du$ .

В работе [1] для преобразования  $T$  доказана центральная предельная теорема с остаточным членом вида  $O(n^{-1/2+\varepsilon})$ , где  $\varepsilon$  – сколь угодно малое фиксированное положительное число. Используя этот результат, можно продвинуться дальше при исследовании асимптотического поведения функции  $1 - F_n(x)$  в случае больших уклонений, то есть роста  $x$  вместе с  $n$ .

**Теорема 1.** Если при выполнении условий 1–3 существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_n(x) = \sigma^2 > 0,$$

то при  $x \geq 1$ ,  $x = o(n^{1/8}/\ln n)$  справедливы соотношения

$$1 - F_n(x) = (1 - \Phi(x)) \left(1 + O\left(\frac{x \ln n}{n^{1/8}}\right)\right), \quad F_n(-x) = \Phi(-x) \left(1 + O\left(\frac{x \ln n}{n^{1/8}}\right)\right).$$

**Доказательство.** Пусть  $Q$  и  $N$  – растущие вместе с  $n$  натуральные числа (их мы определим позднее),  $p = [n/(Q+N)]$  ( $[a]$  – обозначение целой части числа  $a$ ),

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=(k-1)(Q+N)+1}^{kQ+(k-1)N} f(tW^r), \quad 1 \leq k \leq p,$$

$$\eta_k^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=kQ+(k-1)N+1}^{k(Q+N)} f(tW^r), \quad 1 \leq k \leq p-1,$$

$$\eta_p^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=pQ+(p-1)N+1}^n f(tW^r),$$

$$\zeta_p = \sum_{r=1}^p \eta_r, \quad \zeta_p^0 = \sum_{r=1}^p \eta_r^0, \quad \hat{\zeta}_p = \sum_{r=1}^p \hat{\eta}_r, \quad \hat{\zeta}_p^0 = \sum_{r=1}^p \hat{\eta}_r^0,$$

где  $\hat{\eta}_k, \hat{\eta}_k^0, k = 1, \dots, p$ , – величины, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} 1) \text{ mes } \{t : t \in \bar{\Omega}_d, \hat{\eta}_k < x\} &= \text{mes } \{t : t \in \bar{\Omega}_d, \eta_k < x\}; \\ 2) \int_{\bar{\Omega}_d} \exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \hat{\zeta}_p\right) dt &= \prod_{k=1}^p \int_{\bar{\Omega}_d} \exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \hat{\eta}_k\right) dt. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } \sigma^2(Q) = \int_{\bar{\Omega}_d} \left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{k=1}^Q f(tW^k)\right)^2 dt.$$

Пусть также

$$\begin{aligned} F_p(x) &= \text{mes } \{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{\zeta_p}{\sigma(Q)\sqrt{p}} > x\}, \quad \hat{F}_p(x) = \text{mes } \{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{\hat{\zeta}_p}{\sigma(Q)\sqrt{p}} > x\}, \\ F_p^0(x) &= \text{mes } \{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{\zeta_p^0}{\sigma(Q)\sqrt{p}} > x\}, \quad \hat{F}_p^0(x) = \text{mes } \{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{\hat{\zeta}_p^0}{\sigma(Q)\sqrt{p}} > x\}, \\ f_p(l) &= \int_{\bar{\Omega}_d} \exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \zeta_p\right) dt, \quad \hat{f}_p(l) = \int_{\bar{\Omega}_d} \exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \hat{\zeta}_p\right) dt, \\ f_p^0(l) &= \int_{\bar{\Omega}_d} \exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \zeta_p^0\right) dt, \quad \hat{f}_p^0(l) = \int_{\bar{\Omega}_d} \exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \hat{\zeta}_p^0\right) dt. \end{aligned}$$

Через  $C_k$  будем обозначать в дальнейшем положительные постоянные. Докажем необходимые вспомогательные утверждения.

**Лемма 1.** В условиях теоремы 1 справедлива оценка

$$\int_{\bar{\Omega}_d} \left(\sum_{k=1}^m f(tW^k)\right)^{2\nu} dt \leq (C_1)^{2\nu} (\ln m)^\nu m^\nu (2\nu)!,$$

если  $\nu \leq C \sqrt{m/\ln m}$ ,  $C$  – некоторая положительная постоянная.

**Доказательство.** Запишем

$$\sum_{k=1}^m f(tW^k) = \sum_{r=1}^K \tilde{\eta}_r(t),$$

где  $\tilde{\eta}_r(t) = \sum_{l=0}^{N_r} f(tW^{lK+r})$ ,  $N_r = \left\lfloor \frac{m-r}{K} \right\rfloor + 1$ ,  $K$  – некоторое число, которое мы определим позднее.

Далее, применяем обобщенное  $c_r$ -неравенство

$$\int_{\bar{\Omega}_d} \left(\sum_{r=1}^K \tilde{\eta}_r(t)\right) dt \leq K^{2\nu-1} \sum_{r=1}^K \int_{\bar{\Omega}_d} \tilde{\eta}_r^{2\nu}(t) dt. \quad (1)$$

Произведем оценку  $\int_{\bar{\Omega}_d} \tilde{\eta}_r^{2\nu}(t) dt$ . Для облегчения записи обозначим  $f(tW^{lK+r})$  через  $\tilde{\xi}_{l+1}(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\Omega}_d} \tilde{\eta}_r^{2\nu}(t) dt &= \int_{\bar{\Omega}_d} \left( \sum_{l=1}^{N_r+1} \tilde{\xi}_l(t) \right)^{2\nu} dt = \\ &= \sum_{q=1}^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_q=2\nu, \\ \nu_i \geq 1, \\ 1 \leq k_1 \neq \dots \neq k_q \leq N_r+1}} \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_q!} \int_{\bar{\Omega}_d} \tilde{\xi}_{k_1}^{\nu_1}(t) \dots \tilde{\xi}_{k_q}^{\nu_q}(t) dt. \quad (2) \end{aligned}$$

Функция  $f$  липшиц-непрерывна (в силу условия 1 теоремы). Следовательно, величины  $\tilde{\xi}_l(t)$  являются ограниченными. Допустим, что  $|\tilde{\xi}_l(t)| \leq B$ , где  $B$  – некоторая постоянная. Используя ограниченность величин  $\tilde{\xi}_l(t)$ , оценим часть суммы (2) с  $1 \leq q \leq \nu$  при условии, что  $\nu \leq N_r + 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_q=2\nu, \\ \nu_i \geq 1, \\ 1 \leq k_1 \neq \dots \neq k_q \leq N_r+1}} \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_q!} \int_{\bar{\Omega}_d} \tilde{\xi}_{k_1}^{\nu_1}(t) \dots \tilde{\xi}_{k_q}^{\nu_q}(t) dt &\leq \\ &\leq B^{2\nu} \sum_{q=1}^{\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_q=2\nu, \\ \nu_i \geq 1}} \frac{(N_r+1)^q}{\nu_1! \dots \nu_q!} \leq \\ &\leq B^{2\nu} \sum_{q=1}^{\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} (N_r+1)^q \cdot e^q \leq (C_2 \sqrt{e})^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!} (N_r+1)^\nu. \quad (3) \end{aligned}$$

Оценим теперь оставшуюся часть суммы (2) применяя лемму 2 из [2]:

$$\begin{aligned} \sum_{q=\nu+1}^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_q=2\nu, \\ \nu_i \geq 1, \\ 1 \leq k_1 \neq \dots \neq k_q \leq N_r+1}} \frac{1}{\nu_1! \dots \nu_q!} \int_{\bar{\Omega}_d} \tilde{\xi}_{k_1}^{\nu_1}(t) \dots \tilde{\xi}_{k_q}^{\nu_q}(t) dt &\leq \\ &\leq (Be)^{2\nu} (C_3)^\nu \theta^K \sum_{q=\nu+1}^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{q!} (N_r+1)^q, \quad (4) \end{aligned}$$

где  $0 < \theta < 1$ .

Далее,

$$\sum_{q=\nu+1}^{2\nu} \frac{(N_r+1)^{q-\nu}}{q!} \leq (C_4)^{2\nu} \frac{(N_r+1)^\nu}{\nu!},$$

поэтому из (2) с учетом оценок (3) и (4) получим

$$\int_{\bar{\Omega}_d} \tilde{\eta}_r^{2\nu}(t) dt \leq (C_5)^{2\nu} \frac{(2\nu)!}{\nu!} (N_r+1)^\nu (1 + \theta^K (N_r+1)^\nu). \quad (5)$$

Очевидно, что  $N_r^\nu \leq 2^\nu \left(\frac{m}{K}\right)^\nu$ . Исходя из этого величины  $K$  и  $\nu$  будем выбирать из условия

$$\theta^K \left(\frac{m}{K}\right)^\nu \leq C_6. \quad (6)$$

Предположим, что  $K \leq m/3$ . Тогда условие (6) будет выполняться, если

$$K \in \left( \nu \ln m, \frac{m}{3} \right). \quad (7)$$

Пусть  $K = [\nu \ln m] + 1$ . Если  $\nu \leq C_7 m / \ln m$ , то выбранное  $K$  будет принадлежать интервалу (7). В то же время  $\nu \leq N_r + 1$ . Отсюда, так как  $N_r \leq C_8 m / K$ , следует, что

$$\nu \leq C_9 \sqrt{\frac{m}{\ln m}}.$$

Таким образом, оценка леммы 1 верна при  $\nu \leq C_9 \sqrt{m / \ln m}$ .

Лемма 1 доказана.  $\square$

**Лемма 2.** *Справедлива оценка*

$$\int_{\bar{\Omega}_d} \exp \left( h \left| \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^Q f(tW^r) \right| \right) dt \leq C_{10} < \infty, \quad (8)$$

где  $0 < h < \varepsilon_0 / \sqrt{\ln Q}$ ,  $\varepsilon_0$  – достаточно малое фиксированное положительное число.

**Доказательство.** Имеем:

$$\int_{\bar{\Omega}_d} \exp \left( h \left| \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^Q f(tW^r) \right| \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \int_{\bar{\Omega}_d} \left| \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^Q f(tW^r) \right|^k dt. \quad (9)$$

При  $k \leq C_9 \sqrt{Q / \ln Q}$  из леммы 1 следует оценка

$$\int_{\bar{\Omega}_d} \left| \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^Q f(tW^r) \right|^k dt \leq (C_1)^k k! \ln^{k/2} Q. \quad (10)$$

При  $k > C_9 \sqrt{Q / \ln Q}$  используем очевидную оценку

$$\int_{\bar{\Omega}_d} \left| \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^Q f(tW^r) \right|^k dt \leq C_{11} Q^{k/2}. \quad (11)$$

Тогда из неравенств (10), (11) следует

$$\int_{\bar{\Omega}_d} \exp \left( h \left| \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=1}^Q f(tW^r) \right| \right) dt \leq C_{10} < \infty.$$

Лемма 2 доказана.  $\square$

**Лемма 3.** *Справедлива оценка*

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{r=1}^m f(tW^r) \right| \geq w \right\} \leq \exp \left( -C_{12} \frac{w}{\ln^\lambda m} \right), \quad (12)$$

где  $\lambda > 1/2$  – постоянная.

**Доказательство.** По неравенству Маркова

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{r=1}^m f(tW^r) \right| \geq w \right\} \leq \frac{1}{m^\nu w^{2\nu}} \int_{\overline{\Omega}_d} \left| \sum_{r=1}^m f(tW^r) \right|^{2\nu} dt.$$

Пусть  $\nu \leq C_{13} \sqrt{m/\ln m}$ . В этом случае, используя оценку из леммы 1, получим

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{r=1}^m f(tW^r) \right| \geq w \right\} \leq \exp \left( -C_{14} \frac{w}{\ln^\lambda m} \right),$$

если только  $w \leq C_{15} \sqrt{m} \ln^{\lambda_1} m$  ( $\lambda_1 > 0, \lambda - \lambda_1 > 1/2$ ).

Поскольку для  $B < w/\sqrt{m}$

$$\int_{\overline{\Omega}_d} \left( \sum_{r=1}^m f(tW^r) \right)^{2\nu} dt \leq B^{2\nu} m^\nu,$$

то, выбирая  $\nu = C_{16} w/\ln^\lambda m$ , получим

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sqrt{m}} \left| \sum_{r=1}^m f(tW^r) \right| \geq w \right\} \leq \exp \left( -C_{17} \frac{w}{\ln^\lambda m} \right).$$

Полученные оценки доказывают лемму 3.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $\hat{\mu}_\nu = \int_{\overline{\Omega}_d} \left( \frac{\eta_1}{\sigma(Q)} \right)^\nu dt$ ,  $\mu_\nu$  —  $\nu$ -й момент нормальной нормированной величины. Тогда если

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{m}} \sum_{r=1}^m f(tW^r) < x \right\} = \Phi(x) + O \left( \frac{1}{1+|x|^\beta} \frac{1}{m^\alpha} \right),$$

где  $\beta > 1$ ,  $0 \leq \alpha < 1/2$ , то

$$\hat{\mu}_\nu = \mu_\nu + O \left( (C_{18})^\nu \nu! \ln^{(\lambda+1)\nu} Q \frac{1}{Q^\alpha} \right). \quad (13)$$

**Доказательство.** Введем обозначение

$$\overline{F}_Q(x) = \text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{\eta_1}{\sigma(Q)} < x \right\}.$$

По условию настоящей леммы

$$\overline{F}_Q(x) = \Phi(x) + R_Q(x),$$

где

$$|R_Q(x)| = O \left( \frac{1}{1+|x|^\beta} \frac{1}{Q^\alpha} \right). \quad (14)$$

Отсюда следует

$$\widehat{\mu}_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu d\Phi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu dR_Q(x) = \mu_\nu + \int_{-N_1}^{N_1} x^\nu dR_Q(x) + \int_{|x|>N_1} x^\nu dR_Q(x). \quad (15)$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части (15). Первый из них оценим, используя (14):

$$\left| \int_{-N_1}^{N_1} x^\nu dR_Q(x) \right| \leq C_{19} N_1^\nu \frac{1}{Q^\alpha}. \quad (16)$$

Применяя оценку (12), можно доказать, что

$$|R_Q(x)| \leq C_{20} \exp \left( -C_{21} \frac{|x|}{\ln^\lambda Q} \right),$$

следовательно,

$$\left| \int_{|x|>N_1} x^\nu dR_Q(x) \right| = C_{22} \frac{N_1^\nu}{Q^\alpha} + C_{23} \nu \int_{N_1}^{+\infty} x^{\nu-1} \exp \left( -C_{21} \frac{x}{\ln^\lambda Q} \right) dx. \quad (17)$$

Выберем  $N_1 = \nu \ln^{(\lambda+1)} Q$ . Оценки (16) и (17) подставим в (15). В результате получим утверждение леммы.  $\square$

**Лемма 5.** Пусть  $\lambda^{(m)}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tau^k$  – ряд Крамера<sup>1</sup>, построенный для величин  $(\sigma(m)\sqrt{m})^{-1} \sum_{r=1}^m f(tW^r)$ . Если

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \overline{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma\sqrt{m}} \sum_{r=1}^m f(tW^r) < x \right\} = \Phi(x) + O \left( \frac{1}{1+|x|^\beta} \frac{1}{m^\alpha} \right),$$

где  $\beta > 1$ ,  $0 \leq \alpha < 1/2$ , то

$$\lambda^{(m)}(\tau) = O \left( \frac{\ln^5 m}{m^\alpha} \right)$$

при  $|\tau| \leq \delta / \ln^2 m$  ( $\delta$  – достаточно малое положительное число).

**Доказательство.** Положим

$$M(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(zx) d\Phi(x), \quad K(z) = \ln M(z),$$

$$M_1(z) = \int_{\overline{\Omega}_d} \exp \left( z \frac{\eta_1}{\sigma(Q)} \right) dt, \quad K_1(z) = \ln M_1(z),$$

---

<sup>1</sup>См. [3, гл. VII, § 2].

Существование  $M_1(z)$  при  $|z| \leq \varepsilon/\sqrt{\ln Q}$  гарантируется леммой 2. Запишем

$$M_1(z) = 1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\widehat{\mu}_{\nu} z^{\nu}}{\nu!} \quad (18)$$

Далее, используя асимптотическое разложение (13) из леммы 4, получим при  $|z| \leq 1/(\ln^{\lambda+1} Q)$

$$M_1(z) = M(z) + O\left(\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^{\alpha}} z^3\right),$$

а также

$$M'_1(z) = M'(z) + O\left(\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^{\alpha}} z^2\right).$$

Из этих соотношений следует

$$K_1(z) = K(z) + \ln \frac{M_1(z)}{M(z)} = \frac{z^2}{2} \left(1 + O\left(z \frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^{\alpha}}\right)\right)$$

и

$$K'_1(z) = \frac{M'_1(z)}{M_1(z)} = z \left(1 + O\left(z \frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^{\alpha}}\right)\right), \quad (19)$$

так как  $M(z) = \exp(z^2/2)$ .

Решая относительно  $z$  уравнение  $K'_1(z) - \tau = 0$ , получим

$$z = z_0(\tau) = \tau \left(1 + O\left(\tau \frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^{\alpha}}\right)\right), \quad (20)$$

если только  $|\tau| \leq 1/(\ln^{\lambda+1} Q)$ . В силу (19) при  $|\tau| \leq 1/(\ln^{\lambda+1} Q)$  из (20) следует

$$K_1(z_0(\tau)) = \frac{\tau^2}{2} \left(1 + O\left(\tau \frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^{\alpha}}\right)\right).$$

Так как ряд Крамера  $\lambda^m(\tau)$  определяется из соотношения (см. гл. VII [3])

$$K_1(z_0(\tau)) - \tau z_0(\tau) = -\frac{\tau^2}{2} + \tau^3 \lambda^m(\tau),$$

где  $z_0(\tau)$  дается равенством (20), то мы получим при  $|\tau| \leq 1/(\ln^{\lambda+1} Q)$

$$\begin{aligned} \lambda^m(\tau) &= \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{2} \left( 1 + O\left(\tau \frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^{\alpha}}\right) \right) + \frac{1}{2} - \left( 1 + O\left(\tau \frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^{\alpha}}\right) \right) \right) = \\ &= O\left(\frac{\ln^{3(\lambda+1)} Q}{Q^{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

Поскольку  $\lambda > 1/2$ , то из полученного асимптотического равенства следует утверждение леммы 5.  $\square$



**Лемма 6.** При  $x \geq 1$ ,  $x = O\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p \ln n} \ln^{-2} N\right)\right)$ ,  $N = o(Q)$  справедлива оценка

$$\text{mes}\left\{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}} |\zeta_p^0| > x w \sqrt{N \ln n / Q}\right\} = O\left(\frac{e^{-x^2/2}}{x n^w} + \sqrt{\frac{p}{N}} e^{-C_{24} Q}\right),$$

где  $w$  – достаточно большое фиксированное положительное число.

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \text{mes}\left\{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \hat{\zeta}_p^0 > y\right\} &= \\ &= \text{mes}\left\{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{\sigma(N)}{\sigma(Q)} \sqrt{N/Q} \frac{1}{\sigma(N)\sqrt{p}} \sum_{k=1}^p \left(\sqrt{Q/N} \hat{\eta}_k^0\right) > y\right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Докажем, что  $\sigma(Q) = \sigma(1 + O(1/Q))$ . Запишем, используя теорему 18.2.1 [3]:

$$\begin{aligned} \sigma^2(Q) &= \int_{\bar{\Omega}_d} \left(\frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{k=1}^Q f(tW^k)\right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{Q} \left( Q \int_{\bar{\Omega}_d} f^2(tW) dt + 2 \sum_{j=1}^Q (Q-j) \int_{\bar{\Omega}_d} f(tW) f(tW^{j+1}) dt \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 2 [2] имеем

$$\int_{\bar{\Omega}_d} f(tW) f(tW^{j+1}) dt = O(\theta^j), \quad 0 < \theta < 1,$$

следовательно,

$$\sigma^2(Q) = \sigma^2(1 + O(1/Q)).$$

Отсюда следует

$$\sigma(Q) = \sigma(1 + O(1/Q)).$$

Тогда мы можем записать (21) следующим образом:

$$\hat{F}_p^0(y) = \text{mes}\left\{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(N)\sqrt{p}} \sum_{k=1}^p \left(\sqrt{Q/N} \hat{\eta}_k^0\right) > y \sqrt{Q/N} + \Delta_1\right\},$$

где  $\Delta_1 = O\left(y \sqrt{Q/N}\right)$ .

Применим к правой части данного выражения теорему 1 [4] о больших отклонениях для независимых и разнораспределенных слагаемых, после чего получим, что равномерно для всех  $y \sqrt{Q/N} + \Delta_1$  из интервала  $[1, \sqrt{p}/w(p) \sqrt{\ln N}]$

$$\begin{aligned} \hat{F}_p^0(y) &= \left(1 - \Phi\left(y \sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)\right) \exp\left(\frac{(y \sqrt{Q/N} + \Delta_1)^3}{\sqrt{p}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \lambda_p\left(\frac{y \sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{y \sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\lambda_p(u)$  – степенной ряд, сходящийся при достаточно малых значениях  $|u|$  равномерно для всех  $p$ ,  $w(p)$  – функция, удовлетворяющая условию  $\lim_{p \rightarrow \infty} w(p) = \infty$ .

Степенной ряд  $\lambda_p(u)$  записывается следующим образом (см. (10) в [4]):

$$\lambda_p(u) = \frac{1}{6} \frac{\Gamma_{3p}}{\Gamma_{2p}^{1/2}} + \frac{\Gamma_{4p} \Gamma_{2p} - 3 \Gamma_{3p}^2}{24 \Gamma_{2p}^3} u + \dots, \quad (23)$$

где  $\Gamma_{kp} = p^{-1} \sum_{j=1}^p \gamma_{kj}$ ,  $\gamma_{kj}$  – семиинварианты порядка  $k$  величин  $\sqrt{Q/N} \eta_j^0$ , то есть

$$\gamma_{kj} = (-1)^k \frac{d^k}{dl^k} \ln \varphi_{\eta_j^0}(l) \Big|_{l=0}, \quad \text{где } \varphi_{\eta_j^0}(l) = \int_{\bar{\Omega}_d} \exp(i l \eta_j^0) dt.$$

Очевидно, что  $\gamma_{k1} = \dots = \gamma_{k,p-1} = \gamma_k$ , где  $\gamma_k$  –  $k$ -й семиинвариант суммы  $N^{-1/2} \sum_{k=1}^N f(tW^k)$ . Учитывая это, а также неравенство  $|n - p(Q + N)| \leq p$  (величины  $p$ ,  $Q$  и  $N$  мы будем выбирать так, чтобы это неравенство выполнялось), можно легко показать, что для всех  $k$  справедливо равенство  $\Gamma_{kp} = \gamma_k(1 + O(1/p))$ . Отсюда после подстановки в (23) получим равенство

$$\lambda_p(u) = \lambda^{(N)}(u)(1 + O(1/p)),$$

где  $\lambda^{(N)}(u)$  – ряд Крамера, построенный для величин  $\sqrt{Q/N} \eta_j^0$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

Используя полученное равенство, перепишем (22) следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{F}_p^0(y) = & \left(1 - \Phi\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)\right) \exp\left(\frac{\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right)^3}{\sqrt{p}} \times \right. \\ & \left. \times \lambda^{(N)}\left(\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$G_p(z) = (1 - \Phi(z)) \exp\left(\frac{z^3}{\sqrt{p}} \lambda^{(N)}\left(\frac{z}{\sqrt{p}}\right)\right).$$

Тогда

$$\hat{F}_p^0(y) = G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right) \left(1 + O\left(\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right). \quad (24)$$

Перейдем в полученном выражении к величинам  $\eta_j^0$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Справедливо неравенство

$$\left|F_p^0(y) - \hat{F}_p^0(y)\right| \leq \Delta_2 + \left|\hat{F}_p^0(y) - \hat{F}_p^0(y + \Delta_2)\right| + \left|\hat{F}_p^0(y) - \hat{F}_p^0(y - \Delta_2)\right|, \quad (25)$$

где  $\Delta_2 = L\left(F_p^0, \widehat{F}_p^0\right)$  – расстояние между  $F_p^0$  и  $\widehat{F}_p^0$ , измеряемое в метрике Леви. По неравенству из работы [5] имеем

$$L\left(F_p^0, \widehat{F}_p^0\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^U \left| f_p^0(l) - \widehat{f}_p^0(l) \right| \frac{dl}{l} + 2e \frac{\ln U}{U}, \quad U > e. \quad (26)$$

Из леммы 3 работы [2] вытекает, что

$$\left| f_p^0(l) - \widehat{f}_p^0(l) \right| \leq C_{25} \sqrt{p/N} \exp(-C_{26} Q). \quad (27)$$

Обозначим  $\sqrt{p/N} \exp(-C_{26} Q) = \alpha_1$ . Положим  $U = \alpha_1^{-1}$ . Используя в интервале  $[0, \sqrt{\alpha_1}]$  тривиальную оценку  $\left| f_p^0(l) - \widehat{f}_p^0(l) \right| \leq C_{27} l^2$ , а в интервале  $[\sqrt{\alpha_1}, \alpha_1^{-1}]$  – оценку (27), запишем

$$\int_0^U \left| f_p^0(l) - \widehat{f}_p^0(l) \right| \frac{dl}{l} \leq C_{27} \int_0^{\sqrt{\alpha_1}} l \, dl + \int_{\sqrt{\alpha_1}}^{\alpha_1^{-1}} \alpha_1 \frac{dl}{l} = O(\alpha_1).$$

Из полученной оценки и (26) следует

$$L\left(F_p^0, \widehat{F}_p^0\right) = O(\alpha_1). \quad (28)$$

Перейдем к оценке разностей  $F_p^0 - \widehat{F}_p^0(y \pm \Delta_2)$ . Несложно доказать следующие неравенства:

$$|\Phi(z + \Delta) - \Phi(z)| \leq C_{28} |\Delta| \exp(-z^2/2), \quad \text{если } |z| \leq |\Delta|^{-1}, \quad (29)$$

$$\sup_{1 \leq z \leq \sqrt{p}/(w(p)\sqrt{\ln N})} \left| \lambda^{(N)}\left(\frac{z + \Delta}{\sqrt{p}}\right) - \lambda^{(N)}\left(\frac{z}{\sqrt{p}}\right) \right| \leq C_{29} \frac{|\Delta|}{\sqrt{p}} G,$$

где  $G = \sum_{j=0}^{\infty} j |\lambda_j| (z/\sqrt{p})^{j-1} < \infty$ ,

$$\sup_{1 \leq z \leq \sqrt{p}/(w(p)\sqrt{\ln N})} \left| \frac{(z + \Delta)^3}{\sqrt{p}} - \frac{z^3}{\sqrt{p}} \right| \leq C_{30} \frac{|\Delta| \sqrt{p}}{w^2(p) \ln N},$$

используя которые, находим, что если  $1 \leq z \leq \min(|\Delta|^{-1}, \sqrt{p}/(w^2(p) \ln N))$ , то

$$\begin{aligned} G_p(z + \Delta) &= (1 - \Phi(z) + O(\Delta \exp(-z^2/2))) \times \\ &\times \exp\left(\left(\frac{z^3}{\sqrt{p}} + O\left(\frac{\Delta \sqrt{p}}{w^2(p) \ln N}\right)\right) \left(\lambda^{(N)}\left(\frac{z}{\sqrt{p}}\right) + O\left(\frac{\Delta}{\sqrt{p}}\right)\right)\right) + \\ &+ O\left(\Delta \exp(-z^2/2) \exp\left(\frac{(z + \Delta)^3}{\sqrt{p}} \lambda^{(N)}\left(\frac{z + \Delta}{\sqrt{p}}\right)\right)\right). \quad (30) \end{aligned}$$

Согласно центральной предельной теореме для эндоморфизмов евклидова пространства из [1] можно выбрать величину  $\alpha$  из леммы 5, равной  $1/2 - \varepsilon$ , иначе говоря, при  $|\tau| \leq \delta / \ln^2 N$

$$\lambda^{(N)}(\tau) = O\left(1/N^{1/2-\varepsilon}\right),$$

где  $\varepsilon$  – сколь угодно малое положительное число.

Поэтому при  $\Delta = O(1/\sqrt{p})$  мы получим из (30), что если  $1 \leq z \leq C_{31}\sqrt{p}/\ln^2 N$ , то

$$G_p(z + \Delta) = G_p(z) + O(\Delta). \quad (31)$$

Используя (24) и (31), имеем

$$\begin{aligned} \widehat{F}_p^0(y) - \widehat{F}_p^0(y \pm \Delta_2) &= G_p\left(p\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right) - G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1 \pm \Delta_2\sqrt{Q/N}\right) + \\ &+ O\left(G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1 \pm \Delta_2\sqrt{Q/N}\right) \frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1 \pm \Delta_2\sqrt{Q/N}}{\sqrt{p}} + \right. \\ &\quad \left. + G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right) \frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right) = \\ &= O\left(\Delta_2\sqrt{Q/N} + G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right) \frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right), \quad (32) \end{aligned}$$

где  $1 < y\sqrt{Q/N} + \Delta_1 \leq C_{31}\sqrt{p}\ln^2 N$ . Из (25), (29) и (32) вытекает неравенство

$$\left|F_p^0(y) - \widehat{F}_p^0(y)\right| \leq C_{32} \left(\Delta_2\sqrt{Q/N} + G_p\left(y\sqrt{Q/N} + \Delta_1\right) \frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right). \quad (33)$$

Нетрудно показать, учитывая (28), что при  $1 \leq y\sqrt{Q/N} \leq N^{3/2}/(y\sqrt{Q})$  из неравенства (33) следует оценка

$$\begin{aligned} F_p^0(y) &\leq C_{33} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(y\sqrt{Q/N}\right)^2\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(C_{34} \frac{y^3 Q^{3/2}}{\sqrt{p} N^{3/2}} \lambda^{(N)}\left(\frac{y\sqrt{Q/N} + \Delta_1}{\sqrt{p}}\right)\right) + \\ &\quad + C_{34} \sqrt{p/N} \exp(-C_{26} Q). \quad (34) \end{aligned}$$

Так как  $\lambda^{(N)}(\tau) = O(1/N^{1/2-\varepsilon})$ , то (34) перепишется так:

$$\begin{aligned} F_p^0(y) &\leq C_{33} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(y\sqrt{Q/N}\right)^2 + C_{35} \frac{y^3 Q^{3/2}}{\sqrt{p} N^{2-\varepsilon}}\right) + \\ &\quad + C_{36} \sqrt{p/N} \exp(-C_{26} Q). \quad (35) \end{aligned}$$

Выберем в (35)  $y = xw\sqrt{N\ln n/Q}$ :

$$F_p^0\left(xw\sqrt{N\ln n/Q}\right) = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2}x^2w^2\ln n + C_{35}\frac{x^3w^3\ln^{1/2}n}{\sqrt{p/N}N^{1/2-\varepsilon}}\right) + C_{36}\sqrt{p/N}\exp(-C_{26}Q)\right).$$

Отсюда, так как  $x \geq 1$ ,  $x = O\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p/\ln n}\ln^{-2}N\right)\right)$ , то

$$F_p^0\left(xw\sqrt{N\ln n/Q}\right) = O\left(\frac{\exp(-x^2/2)}{xn^w} + \sqrt{p/N}\exp(-C_{26}Q)\right).$$

Аналогично при  $x \geq 1$ ,  $x = O\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p/\ln n}\ln^{-2}N\right)\right)$ , имеем

$$1 - F_p^0\left(-xw\sqrt{N\ln n/Q}\right) = O\left(\frac{\exp(-x^2/2)}{xn^w} + \sqrt{p/N}\exp(-C_{26}Q)\right).$$

Лемма 6 доказана.  $\square$

Перейдем к доказательству теоремы. Величины  $\hat{\eta}_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , удовлетворяют условиям:

1.  $\text{mes}\{t : t \in \bar{\Omega}_d, \hat{\eta}_k < x\} = \text{mes}\{t : t \in \bar{\Omega}_d, \eta_k < x\}$ ,
2.  $\int_{\bar{\Omega}_d} \exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \sum_{k=1}^p \hat{\eta}_k\right) dt = \prod_{k=1}^p \int_{\bar{\Omega}_d} \exp\left(\frac{il}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \hat{\eta}_k\right) dt$ .

Поэтому к функции  $\hat{F}_p(x) = \text{mes}\left\{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}} \sum_{k=1}^p \hat{\eta}_k > x\right\}$  мы можем применить теорему о больших отклонениях для независимых и одинаково распределенных слагаемых:

$$\hat{F}_p(x) = (1 - \Phi(x)) \exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{p}} \lambda^{(Q)}(x/\sqrt{p})\right) (1 + O(x/\sqrt{p})) \quad (36)$$

для всех  $x$  из  $\left[1, \sqrt{p}/(w(p)\sqrt{\ln Q})\right]$ .

Из леммы 3 работы [2] следует, что

$$|f_p(l) - \hat{f}_p(l)| \leq C_{37}\sqrt{p/Q}\exp(-C_{38}N). \quad (37)$$

Используя (37), оценим разность  $\hat{F}_p(x) - F_p(x)$ . Процедура оценки аналогична оценке разности  $\hat{F}_p^0(x) - \hat{F}_p(x)$  (см. (25)–(33)). Расстояние  $L(F_p, \hat{F}_p)$  по метрике Леви между  $F_p$  и  $\hat{F}_p$  оценивается по формуле

$$L(F_p, \hat{F}_p) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^U \left| f_p(l) - \hat{f}_p(l) \right| \frac{dl}{l} + 2e \frac{\ln U}{U}.$$

Обозначим  $\sqrt{p/Q} \exp(-C_{38} N) = \alpha_2$  и выберем  $U = \alpha_2^{-1}$ . Затем, используя (37) и тривиальную оценку  $|f_p(l) - \hat{f}_p(l)| \leq C_{39} l^2$ , получим, что  $L(F_p, \hat{F}_p) = O(\alpha_2)$ . Из этой оценки и равенства (36) следует

$$F_p(x) = \hat{F}_p(x) + O\left(\sqrt{\frac{p}{Q}} \exp(-C_{38} N) + (1 - \Phi(x)) \exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{p}} \lambda^{(Q)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\right) \frac{x}{\sqrt{p}}\right). \quad (38)$$

Далее, оценим погрешность, возникающую при замене в (38)  $F_p(x)$  на

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{pQ}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) > x \right\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} F_p(x + \alpha_3) + 2\theta_1 \text{mes} \left\{ t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}} |\zeta_p^0| > \alpha_3 \right\} &\leq \\ &\leq \text{mes} \left\{ t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{pQ}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) > x \right\} \leq \\ &\leq F_p(x - \alpha_3) + 2\theta_2 \text{mes} \left\{ t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}} |\zeta_p^0| > \alpha_3 \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\alpha_3 = xw \sqrt{N \ln n / Q}$ ,  $|\theta_1|, |\theta_2| \leq 1$ .

По лемме 6

$$\text{mes} \left\{ t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}} |\zeta_p^0| > \alpha_3 \right\} = O\left(\frac{\exp(-x^2/2)}{x n^w} + \sqrt{p/N} \exp(-C_{24} Q)\right),$$

если  $x \geq 1$ ,  $x = O\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p/\ln n} \ln^{-2} N\right)\right)$ . Поэтому, применив формулу (38), мы получим из (39):

$$\begin{aligned} &\text{mes} \left\{ t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{pQ}} \sum_{k=1}^n f(tW^k) > x \right\} = \\ &= (1 - \Phi(x + \theta_3 \alpha_3)) \exp\left(\frac{(x + \theta_3 \alpha_3)^3}{\sqrt{p}} \lambda^{(Q)}\left(\frac{x + \theta_3 \alpha_3}{\sqrt{p}}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{x + \theta_3 \alpha_3}{\sqrt{p}}\right)\right) + \\ &\quad + O\left(\sqrt{\frac{p}{Q}} \exp(-C_{38} N) + (1 - \Phi(x)) \exp\left(\frac{x^3}{\sqrt{p}} \lambda^{(Q)}\left(\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\right) \frac{x}{\sqrt{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{p}{N}} \exp(-C_{24} Q) + \frac{\exp(-x^2/2)}{x n^w}\right), \end{aligned} \quad (40)$$

равномерно относительно  $x$ ,  $x \geq 1$ ,  $x = O\left(\min\left(\sqrt{N/\ln n}, \sqrt{p}/\left(\sqrt{\ln n} \ln^2 N\right)\right)\right)$ .

Из оценки (29) следует, что при  $x \leq C_{40}(N \ln n / Q)^{-1/4}$

$$\Phi(x + \theta_3 \alpha_3) - \Phi(x) = O\left(x \sqrt{N \ln n / Q} \exp(-x^2/2)\right). \quad (41)$$

По лемме 5  $\lambda^{(Q)}(\tau) = O\left(1/Q^{1/2-\varepsilon}\right)$ , если  $|\tau| \leq \delta/\ln^2 Q$ . Поэтому

$$\exp\left(\frac{(x + \theta_3 \alpha_3)^3}{\sqrt{p}} \lambda^{(Q)}\left(\frac{x + \theta_3 \alpha_3}{\sqrt{p}}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{p} Q^{1/2-\varepsilon}}\right), \quad (42)$$

если  $x \geq 1$ ,  $x = O\left(\min\left(\sqrt{p} \ln^2 Q, p^{1/6} Q^{1/6-\varepsilon}/w(p)\right)\right)$ .

Используя (41), (42), из (40) получим:

$$\begin{aligned} \text{mes}\left\{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}Q} \sum_{k=1}^n f(tW^k) > x\right\} = \\ = (1 - \Phi(x)) \left(1 + O\left(x^2 \sqrt{N \ln n/Q}\right)\right) \left(1 + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{p} Q^{1/2-\varepsilon}}\right)\right) (1 + O(x/\sqrt{p})) + \\ + O\left(\sqrt{\frac{p}{Q}} \exp(-C_{38} N) + (1 - \Phi(x)) \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{x^4}{p Q^{1/2-\varepsilon}}\right) + \sqrt{\frac{p}{N}} \exp(-C_{24} Q) + \right. \\ \left. + \frac{\exp(-x^2/2)}{x n^w}\right) = (1 - \Phi(x)) \left(1 + O\left(x^2 \sqrt{N \ln n/Q} + \frac{x^3}{\sqrt{p} Q^{1/2-\varepsilon}} + \frac{x}{\sqrt{p}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{1 - \Phi(x)} \sqrt{\frac{p}{Q}} \exp(-C_{38} N) + \frac{1}{1 - \Phi(x)} \sqrt{\frac{p}{N}} \exp(-C_{24} Q) + \frac{1}{n^w}\right)\right), \quad (43) \end{aligned}$$

где  $x \geq 1$ ,  $x = O\left(\min\left(\sqrt{\frac{N}{\ln n}}, \left(\frac{Q^{1/4}}{N \ln n}\right)^{1/4}, \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\ln n} \ln^2 N}, \frac{p^{1/6} Q^{1/6-\varepsilon}}{w(p)}\right)\right)$ .

Далее, при  $x \leq \sqrt{\exp(-C_{38} N)}$  имеем оценки

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p/Q} \exp(-C_{38} N)}{1 - \Phi(x)} &= O\left(\sqrt{p/Q} x \exp(-C_{38} N/2)\right), \\ \frac{\sqrt{p/N} \exp(-C_{24} Q)}{1 - \Phi(x)} &= O\left(\sqrt{p/N} x \exp(-C_{24} Q/2)\right). \end{aligned} \quad (44)$$

Выберем  $N = \lceil n^{1/4} \rceil$ ,  $Q = \lceil n^{3/4} \ln^2 n \rceil$ , а  $p$  — из условия

$$|n - p(Q + N)| \leq p. \quad (45)$$

Затем подставим в (43) выбранные  $N$ ,  $p$ ,  $Q$  и оценки (44). В результате получим, что равномерно относительно  $x$ ,  $x \geq 1$ ,  $x = o(n^{1/8} \ln n)$

$$\text{mes}\left\{t : t \in \bar{\Omega}_d, \frac{1}{\sigma(Q)\sqrt{p}Q} \sum_{k=1}^n f(tW^k) > x\right\} = (1 - \Phi(x)) \left(1 + O\left(\frac{x \ln n}{n^{1/8}}\right)\right). \quad (46)$$

Из условия (45) следует, что  $(n/(pQ))^{1/2} = 1 + O(N/Q)$ . Используя эту оценку и оценку  $\sigma(Q) = \sigma(1 + O(1/Q))$ , заменим в равенстве (46)  $\sigma(Q)$  на  $\sigma$  и  $pQ$  на  $n$ . Таким образом, получили формулу

$$1 - F_n(x) = (1 - \Phi(x)) \left(1 + O\left(\frac{x \ln n}{n^{1/8}}\right)\right),$$

где  $x \geq 1$ ,  $x = o(n^{1/8}/\ln n)$ .

Для вывода формулы

$$F_n(-x) = \Phi(-x) \left( 1 + O\left(\frac{x \ln n}{n^{1/8}}\right) \right),$$

где  $x \geq 1$ ,  $x = o(n^{1/8}/\ln n)$ , достаточно заменить  $f(tW^k)$  на  $-f(tW^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .  
Теорема доказана.  $\square$

### Summary

*V.T. Dubrovin.* Large Deviations in the Central Limit Theorem for Endomorphisms of Euclidean Space.

Let  $W$  be such a nonsingular integer matrix that  $|\det W| > 1$ ;  $f$  is a real-valued periodic for every argument Lipschitz-continuous function defined on the unit hypercube from  $R^d$ . For a sequence  $(f(tW^n))$ , we prove the central limit theorem with large deviations within the interval  $[1; o(n^{1/8}/\ln n)]$ .

**Key words:** limit theorem, endomorphisms, large deviations.

### Литература

1. Дубровин В.Т. Центральная предельная теорема для эндоморфизмов евклидова пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 54–65.
2. Дубровин В.Т., Москвин Д.А. О распределении дробных долей одного класса преобразований евклидовых пространств // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971. – Вып. 9. – С. 45–56.
3. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
4. Петров В.В. Обобщение предельной теоремы Крамера // Усп. матем. наук. – 1954. – Т. 9, № 4. – С. 195–202.
5. Золотарев В.М. Несколько новых вероятностных неравенств, связанных с метрикой Леви // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 190, № 5. – С. 1019–1021.

Поступила в редакцию  
06.09.10

---

Дубровин Вячеслав Тимофеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: Vyacheslav.Dubrovin@ksu.ru